УДК 517.52

# О МАКСИМАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЧИСЕЛ

А.Ф. Кужаев[1]

1 *arsenkuzh@outlook.com*; Башкирский государственный университет

*В работе анонсируются взаимосвязи между различными плотностями положительной последовательности и связанными с ними величинами. А именно, даётся формула для вычисления максимальной плотности положительной последовательности.*

**Ключевые слова**: последовательность положительных чисел, максимальная плотность, верхняя плотность.

Через $\Lambda = \{\lambda_n, m_n\}_{n=1}^{\infty}$ будем обозначать кратную последовательность положительных чисел. Точнее: $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — неограниченная строго возрастающая положительная последовательность, и $m_n$ — натуральное число, называемое кратностью элемента $\lambda_n, n \geqslant 1$.

Напомним, что *верхней плотностью* последовательности $\Lambda$ называется величина

$$\bar{n}(\Lambda) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{n(t,\Lambda)}{t}, \quad n(t,\Lambda) = \sum_{\lambda_n \leqslant t} m_n.$$

Кроме того, нам понадобится характеристика, введённая Дж. Полиа (см. [1]) — *максимальная плотность* последовательности $\Lambda$:

$$\bar{n}_0(\Lambda) = \lim_{\delta\to+0} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{n(t,\Lambda) - n(t(1-\delta),\Lambda)}{\delta t}, \quad \delta \in (0;1).$$

Согласно лемме параграфа E3 главы IV книги [2] предел по $\delta \to +0$ всегда существует, так что максимальная плотность определена корректно.

Помимо этого, нам также будут необходимы следующие величины:

$$\bar{L}(\Lambda,\delta) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\lambda(t) - \lambda(t(1-\delta))}{-\ln(1-\delta)}, \quad \lambda(t) = \sum_{\lambda_n \leqslant t} \frac{m_n}{\lambda_n}, \quad \delta \in (0;1).$$

Величина $\bar{L}(\Lambda,\delta)$ была впервые введена, по-видимому, Л.А. Рубелем в [3], и тесно связана с логарифмической блок-плотностью положительной последовательности. По определению это

$$\bar{L}(\Lambda) = \inf_{\delta\in(0;1)} \bar{L}(\Lambda,\delta).$$

В дальнейшем Рубель и П. Маллиавен в своей совместной работе [4] показали, что в случае конечной верхней плотности логарифмическую блок-плотность можно определить так:

$$\bar{L}(\Lambda) = \lim_{\delta\to1} \bar{L}(\Lambda,\delta),$$

то есть данный предел всегда существует. Логарифмическая блок-плотность оказалась важнейшей характеристикой положительной последовательности в решении вопроса полноты системы экспонент в горизотальной полосе (см. [3]).

С использованием этих обозначений формулируется следующая

**Теорема.** *Пусть последовательность $\Lambda$ имеет конечную верхнюю плотность. Тогда праведливы равенства*

$$\bar{n}_0(\Lambda) = \lim_{\delta\to+0} \bar{L}(\Lambda,\delta) = \sup_{\delta\in(0;1)} \bar{L}(\Lambda,\delta).$$

## Литература


1. Polya G. *Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen* // Math. Zeitschr. – 1929. – V. 29. – P. 549-640.

2. Koosis P. *The logarithmic integral I.* – Cambridge University Press, 1997. – P. 625.

3. Rubel L. A. *Necessary and sufficient conditions for Carlson's theorem on entire functions* // Trans. Amer. math. Soc. – 1956. – T. 83. – p. 4I7-429.

4. Malliaven P., Rubel L. A. *On small entire functions of exponential type with given zeros.* // Bull. Soc. Math. France. – 1961. – T. 89 – p. 175-201.


ON MAXIMAL DENSITY OF NUMBERS SEQUENCE

A.F. Kuzhaev

*In this work we announce relations between different densities of a positive sequence and variables related to them. Namely, given the formula for calculating the maximal density of the positive sequence.*

Keywords: sequence of positive numbers, maximal density, upper density.

УДК 517.98

# $C^*$-АЛГЕБРА, ПОРОЖДЕННАЯ ОТОБРАЖЕНИЕМ, КОТОРОЕ ИНДУЦИРУЕТ ИНВЕРСНУЮ ПОЛУГРУППУ

А.Ю. Кузнецова[1]

1 *alla/kuznetsova@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

*В статье рассматриваются $C^*$-алгебры, порожденные отображениями специального вида. Заданное на счетном множестве отображение индуцирует семейство операторов частичной изометрии, порождающее исследуемую алгебру. В работе приводятся условия, при которых это семейство мультипликативно порождает инверсную полугруппу, и изучаются соответствующие алгебры.*

**Ключевые слова**: $C^*$-алгебра, инверсная полугруппа, инвариантное подпространство, оператор обобщенного сдвига, алгебра Теплица.

Пусть $\varphi : X \longrightarrow X$ отображение счетного множества $X$ в себя, удовлетворяющее условию $\operatorname{card}\varphi^{-1}[x] < \infty$ для любого $x \in X$. С парой $(X,\varphi)$ связан граф $(X,\varphi)$ с вершинами в точках множества $X$ и ребрами $(x,\varphi(x))$. $C^*$-алгебра $C^*_\varphi(X)$, порожденная отображением $\varphi$, ассоциирована с данным графом. Конструкция $C^*_\varphi(X)$ была предложена в [1]. Мы предполагаем, что граф $(X,\varphi)$ является связным. Кроме того, считаем, что $\varphi^n(x) \neq x$ ни при каких $n \in \mathbb{N}$ и $x \in X$.